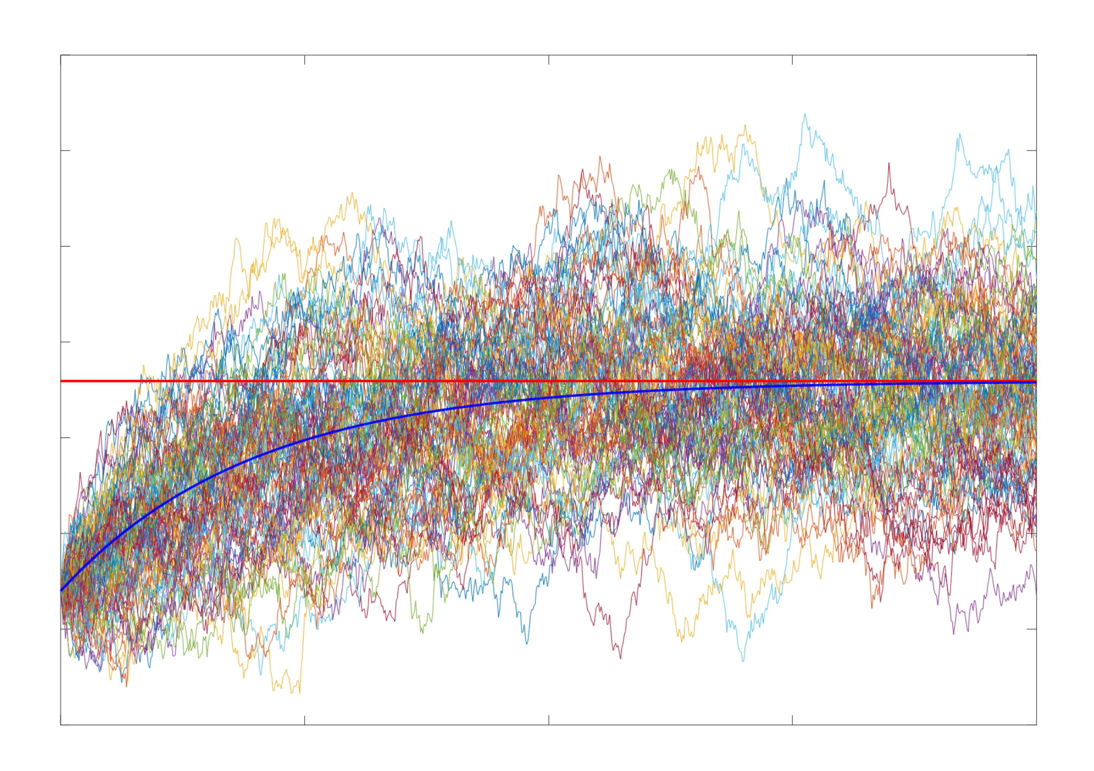
Universidad de El Salvador
Facultad de Ciencias Naturales y Matemática
Escuela de Matemática
Ciclo II - 2021



Generando rutas muestrales: modelos de tasa corta gaussiana

Materia

Análisis Numérico Estocástico

Profesor

Maestro Porfirio Armando Rodríguez

Estudiante

Leonel Antonio Prudencio Castro pc11012

Fecha

24 de septiembre de 2023

1. Índice

Índice

2. Introducción

Existen varios tipos de interés que ofrecen las entidades financieras, modelizar el comportamiento de estas es importante para un mejor aprovechamiento de los recursos financieros que se requieran, en este material se enfocará en un tipo de tasa de interés como lo es la *tasa de interés corta instantánea* y un modelamiento estocástico de su comportamiento que es el modelo de Vasicek y sus variantes. Además de las aplicaciones del modelo en el modelamiento de otros elementos como el precio de bonos por ejemplo.

A lo largo del material se usan algunos términos en inglés para no dar lugar a malas traducciones, se omiten las demostraciones de las fórmulas pero se señala la manera de cómo calcularlas. Se hará uso de código en OCTAVE-MATLAB sobre todo para generar simulaciones de los modelos aplicados y al final se dará solución a problema de aplicación en el que se buscan estimar los parámetros del modelo Vasicek dada una muestra de datos.

2.1. Preliminares

Las dinámicas de las tasas de interés son equivalentes a los movimientos financieros del mercado de bonos. Un bono con cero cupones que paga 1 unidad monetaria al tiempo de madurez T, tiene un precio $p(t,T)$ para cada $t \leq T$. Las hipótesis básicas sobre este mercado son las siguientes :

- Para cada $T > 0$ existe un mercado sin fricciones de T bonos.
- $p(T,T) = 1$
- $p(t,T)$ es diferenciable en T

Luego la *tasa corta instantánea* al tiempo t está dada por:

$$r(t) = f(t,t)$$

El proceso de la “cuenta del dinero"se define como:

$$\beta(t) = \exp\left(\int_0^t r(u)du\right)$$

, este proceso puede ser estocástico, y no sólo variable en el tiempo, de hecho es el numerario para precios neutrales al riesgo. El precio en el momento 0 de un valor derivado que paga X en el tiempo T es la expectativa de $X/\beta(t)$, es decir:

$$E\left[\exp\left(-\int_0^T r(u)du\right)X\right] \tag{2.1}$$

la expectativa tomada con respecto a la medida de neutralidad al riesgo. En particular, el precio en el tiempo 0 de un bono que paga 1 en T está dado por:

$$B(0,T) = E\left[\exp\left(-\int_0^T r(u)du\right)\right] \tag{2.2}$$

Se enfocará principalmente en la dinámica de la tasa corta bajo la medida de neutralidad al riesgo.

3. Modelos básicos y simulación

El modelo generalizado que describe la dinámica de curva de tasas de interés a través de la tasa corta, es el siguiente:

$$dr(t) = \mu(r,t)dt + \sigma(r,t)dW(t)$$

Donde:

$$\begin{aligned}
dr(t) &:= \text{diferencial o cambio de tasa en un tiempo } t \\
\mu(r,t) &:= \text{tendencia o ``drift"de la tasa} \\
\sigma(r,t) &:= \text{volatilidad del cambio de la tasa} \\
dW(t) &:= \text{movimiento browniano geométrico} \\
dt &:= \text{diferencial o cambio del tiempo} \\
r &:= \text{tasa (es función de } t) \\
t &:= \text{tiempo}
\end{aligned}$$

3.1. Modelos

El *modelo clásico de Vasicek* describe la tasa corta a través de un *proceso de Ornstein-Uhlenbeck*:

$$dr(t) = \alpha(b - r(t))dt + \sigma dW(t) \tag{3.1}$$

, aquí W es un movimiento browniano estándar y tanto α, b y σ son constantes positivas.

El drift en 3.1 es positivo si $r(t) < b$ y negativo si $r(t) > b$; por lo tanto, $r(t)$ es empujado hacia el nivel b, una propiedad generalmente referida como *reversión a la media*. Se puede interpretar b como un nivel de tasa de interés a largo plazo y α como la velocidad a la que se tiende de $r(t)$ hacia b.

Se considera también el *modelo Ho-Lee* de tiempo continuo:

$$dr(t) = g(t)dt + \sigma dW(t) \tag{3.2}$$

, con g una función determinista del tiempo.

Tanto 3.1 como 3.2 definen un proceso gausiano, lo que significa que la distribución conjunta de $r(t_1), ..., r(t_n)$ es normal-multivariante para cualquier $t_1, ..., t_n$. Ambos definen los procesos de Markov y son casos especiales del *proceso general de Gauss-Markov* especificado por:

$$dr(t) = [g(t) + h(t)r(t)]\, dt + \sigma(t)dW(t) \tag{3.3}$$

, con g, h y σ todas funciones deterministas del tiempo.

La ecuación diferencial estocástica 3.3 tiene solución:

$$r(t) = e^{H(t)}r(0) + \int_0^t e^{H(t)-H(s)}g(s)ds + \int_0^t e^{H(t)-H(s)}\sigma(s)dW(s)$$

con

$$H(t) = \int_0^t h(s)ds$$

como se puede verificar mediante la aplicación de la fórmula de Itô.

Debido a que esto produce un proceso gaussiano, la simulación de $r(t_1), ..., r(t_n)$ es un caso especial de problema general de muestreo de una distribución normal-multivariante. Pero es un caso especial lo suficientemente interesante como para merecer consideración. Para equilibrar la manejabilidad con la generalidad, el estudio se centrará en el modelo de Vasicek 3.1 con b variable en el tiempo y en el modelo Ho-Lee 3.2. Ideas similares se aplican al caso general 3.3.

3.2. Simulación

Para el modelo de Vasicek con b variable en el tiempo, la solución general anterior tiene esta forma:

$$r(t) = e^{-\alpha t} r(0) + \alpha \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} b(s) ds + \sigma \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} dW(s) \tag{3.4}$$

De manera similar para cualquier $0 < u < t$:

$$r(t) = e^{-\alpha(t-u)} r(u) + \alpha \int_u^t e^{-\alpha(t-s)} b(s) ds + \sigma \int_u^t e^{-\alpha(t-s)} dW(s)$$

De esto se sigue que dado $r(u)$, el valor $r(t)$ se distribuye normalmente con media:

$$\begin{gathered} e^{-\alpha(t-u)} r(u) + \mu(u,t) \\ \mu(u,t) \equiv \alpha \int_u^t e^{-\alpha(t-s)} b(s) ds \end{gathered} \tag{3.5}$$

y varianza:

$$\sigma_r^2(u,t) \equiv \sigma^2 \int_u^t e^{-2\alpha(t-s)} ds = \frac{\sigma^2}{2\alpha}\left(1 - e^{-2\alpha(t-u)}\right) \tag{3.6}$$

Para simular r en los tiempos $0 = t_0 < t_1 < \ < t_n$, se establecen:

$$r\left(t_{i+1}\right) = e^{-\alpha(t_{i+1}-t_i)} r\left(t_i\right) + \mu\left(t_i, t_{i+1}\right) + \sigma_t\left(t_i, t_{i+1}\right) Z_{i+1} \tag{3.7}$$

con $Z_1, ..., Z_n \sim N(0,1)$ independientes.

Este algoritmo es una simulación exacta en el sentido de que la distribución de los $r\left(t_1\right), ..., r\left(t_n\right)$ que produce, es precisamente la del proceso de Vasicek en los tiempos $t_1, ..., t_n$ para el mismo valor de $r(0)$. Por el contrario, el ligeramente más simple *esquema de Euler*:

$$r\left(t_{i+1}\right) = r\left(t_i\right) + \alpha\left(b\left(t_i\right) - r\left(t_i\right)\right)\left(t_{i+1} - t_i\right) + \sigma\sqrt{t_{i+1} - t_i} Z_{i+1} \tag{3.8}$$

conlleva algún error de discretización.

En el caso especial de que $b(t) \equiv b$, el algoritmo de 3.7 se simplifica a:

$$r\left(t_{i+1}\right) = e^{-\alpha(t_{i+1}-t_i)} r\left(t_i\right) + b\left(1 - e^{-\alpha(t_{i+1}-t_i)}\right) + \sigma\sqrt{\frac{1}{2\alpha}\left(1 - e^{-2\alpha(t_{i+1}-t_i)}\right)} Z_{i+1} \tag{3.9}$$

3.3. Versión estacionaria

Suponga que $b(t) \equiv b$ y $\alpha > 0$. Entonces de 3.5:

$$E\left[r(t)\right] = e^{-\alpha t} r(0) + \left(1 - e^{-\alpha t}\right) b \to b, t \to \infty$$

por lo que el proceso $r(t)$ tiene una media límite (valor esperado a largo plazo). También tiene una variación límite (vía 3.6) dada por:

$$\lim_{t\to\infty} Var\left[r(t)\right] = \lim_{t\to\infty} \frac{\sigma^2}{2\alpha}\left(1 - e^{-2\alpha t}\right) = \frac{\sigma^2}{2\alpha}$$

De hecho, $r(t)$ converge en distribución a una distribución normal con esta media y varianza, en el sentido de que para cualquier $x \in \mathbb{R}$:

$$P\left(r(t) \leq x\right) \to \Phi\left(\frac{x - b}{\sigma/\sqrt{2\alpha}}\right)$$

con Φ la distribución normal estándar.

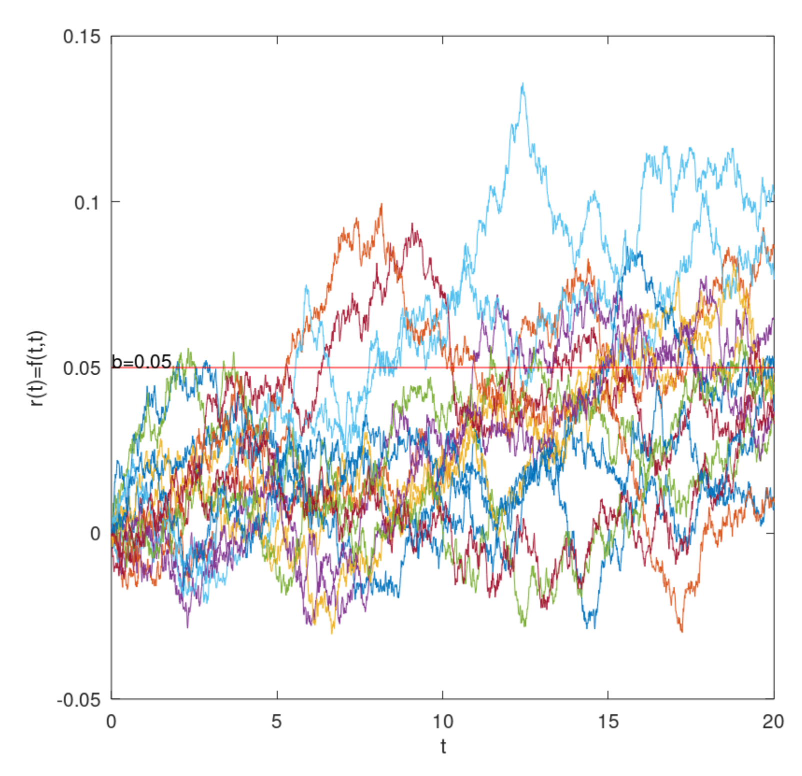
3.4. Ejemplo

Se considera la ecuación 3.9 (modelo de Vasicek) para valores: $\alpha = 0{,}1$, $b = 0{,}05$, $\sigma = 0{,}015$ y $r(0) = 0$, con lo cual:

$$r\left(t_{i+1}\right) = e^{-0{,}1(t_{i+1}-t_i)} r\left(t_i\right) + 0{,}05\left(1 - e^{-0{,}1(t_{i+1}-t_i)}\right) + 0{,}015\sqrt{\frac{1}{2(0{,}1)}\left(1 - e^{-2(0{,}1)(t_{i+1}-t_i)}\right)} Z_{i+1}$$

con $Z_1, ..., Z_n \sim N(0,1)$ independientes , a continuación se presenta la gráfica de 15 simulaciones (*figura 1*) realizadas por medio del *código 1*.

Figura 1: Simulaciones del modelo de Vasicek
Además de las simulaciones se muestra el valor del interés a largo plazo: b=0.05



Código 1: Simulaciones del modelo de Vasicek

```
clear ; close all; clc
pkg load statistics

delta_tiempo = 0.01;% dt
tiempo_final = 20;
tiempo = 0:delta_tiempo:tiempo_final;

alpha = 0.1; % α
sigma = 0.015; % σ
b = 0.05; % b
x0 = 0; % r_0

```

```
for k = 1:15
    T(1) = tiempo(1);
    X(1) = x0;
    Z(1) = 0;
    for i = 2:length(tiempo)
        T(i) = tiempo(i);
        Z(i) = normrnd(0, 1);
        X(i) = exp(-alpha*(tiempo(i)-tiempo(i-1)))*X(i-1)...
        +b*(1-exp(-alpha*(tiempo(i)-tiempo(i-1))))...
        +sigma*sqrt((1/(2*alpha))*(1-exp(-2*alpha*(tiempo(i)-tiempo(i-1)))))*Z(i);
    end
    plot(T, X);
    hold on;
end
plot([0,tiempo_final], [0.05,0.05], "-r");
xlabel("t");ylabel("r(t)=f(t,t)");text([0.01], [0.052], "b=0.05");axis("square");
```

4. Precios de bonos

Como ya se señaló, los parámetros drift dependientes del tiempo se utilizan típicamente para hacer un modelo de tasa corta consistente con un conjunto observado de precios de bonos. La implementación del algoritmo de simulación 3.7 está, por tanto, vinculada a la *calibración* del modelo a través de la elección de la función $b(t)$. Lo mismo se aplica a la función $g(t)$ en el modelo de Ho-Lee y como este caso es un poco más simple, se considera primero.

El punto de partida es la fórmula de fijación de precios de los bonos 2.2. La integral de $r(u)$ de 0 a T que aparece en esa fórmula se distribuye normalmente porque $r(u)$ es un proceso gaussiano. De ello se deduce que el precio del bono es la expectativa de el exponencial de una variable aleatoria normal. Para una variable aleatoria normal $X \sim N(m, v^2)$, se tiene $E[\exp(X)] = \exp(m + (v^2/2))$, entonces:

$$E\left[\exp\left(-\int_0^T r(t)dt\right)\right] = \exp\left(-E\left[\int_0^T r(t)dt\right] + \frac{1}{2}Var\left[\int_0^T r(t)dt\right]\right) \tag{4.1}$$

Para encontrar el precio del bono, por lo tanto, se necesita encontrar la media y la varianza de la integral de la tasa corta.

En el modelo de Ho-Lee, la tasa corta viene dada por:

$$r(t) = r(0) + \int_0^t g(s)ds + \sigma W(t)$$

y su integral por:

$$\int_0^T r(u)du = r(0)T + \int_0^T \int_0^u g(s)dsdu + \sigma \int_0^T W(u)du$$

Esta integral tiene media:

$$r(0)T + \int_0^T \int_0^u g(s)dsdu$$

y varianza

$$\begin{aligned} Var\left[\sigma \int_0^T W(u)du\right] &= 2\sigma^2 \int_0^T \int_0^t Cov\left[W(u), W(t)\right] dudt \\ &= 2\sigma^2 \int_0^T udu dt \\ &= \tfrac{1}{3}\sigma^2 T^3 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Sustituyendo estas expresiones en 4.1, se obtiene:

$$\begin{aligned} B(0,T) &= E\left[\exp\left(-\int_0^T r(u)du\right)\right] \\ &= \exp\left(-r(0)T - \int_0^T \int_0^u g(s)dsdu + \frac{\sigma^2 T^3}{6}\right) \end{aligned}$$

Si se da un conjunto de precios de bonos $B(0,T)$ en el tiempo 0, el objetivo es elegir la función g para que se mantenga esta ecuación. Para llevar a cabo esto se escribe:

$$B(0,T) = \exp\left(-\int_0^T f(0,t)dt\right)$$

con $f(0,t)$ la tasa *forward* instantánea para el tiempo t en el tiempo 0. La curva directa inicial $f(0,T)$ captura la misma información que los precios iniciales de los bonos. Igualando las dos expresiones para $B(0,T)$ y tomando logaritmos, se tiene que:

$$r(0)T + \int_0^T \int_0^u g(s)dsdu - \frac{\sigma^2 T^3}{6} = \int_0^T f(0,t)dt$$

Diferenciando dos veces con respecto al argumento de madurez T:

$$g(t) = \frac{\partial}{\partial T} f(0,T) \mid_{T=t} + \sigma^2 t \tag{4.3}$$

Por lo tanto, los precios de los bonos producidos por el modelo de Ho-Lee coincidirán con un conjunto dado de precios de los bonos $B(0,T)$ si la función g está vinculada a la curva inicial a plazo $f(0,T)$. Así:

$$dr(t) = \left(\frac{\partial}{\partial T} f(0,T) \mid_{T=t} + \sigma^2 t \right) dt + \sigma dW(t) \tag{4.4}$$

Se puede realizar una simulación genérica del modelo Ho-Lee con función drift g escrita como:

$$r(t_{i+1}) = r(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} g(s)ds + \sigma \sqrt{t_{i+1} - t_i} Z_{i+1}$$

con $Z_1, Z_2, ...$ variables aleatorias independientes $N(0,1)$. Con g elegido como en 4.3, esto se simplifica:

$$r(t_{i+1}) = r(t_i) + [f(0, t_{i+1}) - f(0, t_i)] + \frac{\sigma^2}{2} \left[t_{i+1}^2 - t_i^2 \right] + \sigma \sqrt{t_{i+1} - t_i} Z_{i+1}$$

Por tanto, no es necesaria ninguna integración de la función drift g; para ponerlo de esta manera, cualquier integración que sea necesaria ya debe haber sido tratada en elegir la curva a plazo $f(0,t)$ para que coincida con un conjunto de precios de bonos.

La situación es aún más simple si se requiere que la tasa corta simulada sea consistente solo con bonos que vencen en los tiempos de simulación $t_1, ..., t_n$. Para satisfacer este requisito se puede debilitar 4.3 a la condición:

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} g(s)ds = f(0, t_{i+1}) - f(0, t_i) + \frac{\sigma^2}{2} \left[t_{i+1}^2 - t_i^2 \right]$$

Excepto por esta restricción, la elección de g es indiferente; se puede llevarla a ser continuo y lineal por partes, por ejemplo. De hecho, ni siquiera se necesita especificar g porque solo su integral sobre los intervalos $(t_i, t_i + 1)$ influye en los valores de r en la malla de tiempo $t_1, ..., t_n$.

4.1. Bonos en el modelo Vasicek

Una solución similar, aunque menos explícita, se aplica al modelo de Vasicek. La integral de la tasa corta se distribuye normalmente de nuevo; hay que encontrar la media y varianza de esta integral para encontrar el precio de un bono usando 4.1. Usando 3.4, para la media:

$$\begin{aligned} E\left[\int_0^T r(t)dt\right] &= \int_0^T E\left[r(t)\right] dt \\ &= \frac{1}{\alpha}\left(1 - e^{-\alpha T}\right) r(0) + \alpha \int_0^T \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} b(s) ds dt \end{aligned} \tag{4.5}$$

Para la varianza se tiene:

$$Var\left[\int_0^T r(t)dt\right] = 2\int_0^T \int_0^t Cov\left[r(t), r(u)\right] dudt \tag{4.6}$$

De 3.4 y para $u \leq t$:

$$\begin{array}{rcl} Cov\left[r(t), r(u)\right] & = & \sigma^2 \int_0^u e^{-\alpha(t-s)} e^{-\alpha(u-s)} ds \\ & = & \frac{\sigma^2}{2\alpha}\left(e^{\alpha(u-t)} - e^{-\alpha(u-t)}\right) \end{array} \tag{4.7}$$

Integrando dos veces más como se requiere para 4.6 da:

$$Var\left[\int_0^T r(t)dt\right] = \frac{\sigma^2}{\alpha^2}\left[T + \frac{1}{2\alpha}\left(1 - e^{2\alpha T}\right) + \frac{2}{\alpha}\left(e^{-\alpha T} - 1\right)\right] \tag{4.8}$$

Combinando 4.5 y 4.8 como en 4.1, se llega a una expresión para el precio del bono $B(0, T)$.

Se observa que 4.8 no depende de $r(0)$ y 4.5 es una transformación lineal de $r(0)$. Luego:

$$A(t, T) = \frac{1}{\alpha}\left(1 - e^{-\alpha(T-t)}\right)$$

y

$$\begin{array}{rcl} C(t, T) & = & -\alpha \int_t^T \int_t^u e^{-\alpha(u-s)} b(s) dsdu \\ & & + \frac{\sigma^2}{2\alpha^2}\left[(T-t) + \frac{1}{2\alpha}\left(1 - e^{-2\alpha(T-t)}\right) + \frac{2}{\alpha}\left(e^{-\alpha(T-t)} - 1\right)\right] \end{array}$$

, esta ecuación puede simplificarse de esta manera:

$$C(t, T) = (A(t, T) - (T-t))\left(b - \frac{\sigma^2}{2\alpha^2}\right) - \frac{\sigma^2}{4\alpha} A(t, T)^2$$

, luego sustituyendo 4.5 y 4.8 en 4.1 produce:

$$B(0, T) = \exp\left(-A\left(0, T\right) r(0) + C\left(0, T\right)\right)$$

De hecho, los mismos cálculos muestran que

$$B(t, T) = \exp\left(-A\left(t, T\right) r(t) + C\left(t, T\right)\right) \tag{4.9}$$

En particular, $\log B(t, T)$ es una transformación lineal de $r(t)$.

Como en la discusión del modelo de Ho-Lee, la función $b(s)$ se puede elegir para igualar un conjunto de precios $B(0, T)$ indexados por T. Si solo interesa igualar un conjunto finito de precios de bonos $B(0, t_1), ..., B(0, t_n)$, entonces solo los valores de las integrales

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} e^{-\alpha(t_{i+1}-s)} b(s) ds$$

necesita ser especificado. Estos son precisamente los términos $\mu(t_i, t_i + 1)$ necesarios en el algoritmo de simulación 3.7. Por tanto, estas integrales son subproductos del ajuste el modelo a una estructura temporal y no se requieren cálculos adicionales únicamente para la simulación.

4.2. Simulación conjunta con el valor de descuento

La mayoría de las aplicaciones que requieren la simulación de un proceso de velocidad corta $r(t)$ también requieren valores del factor de descuento

$$\frac{1}{\beta(t)} = \exp\left(-\int_0^t r(u)du\right)$$

o, equivalentemente de

$$Y(t) = \int_0^t r(u)du$$

Dados los valores $r(0), r(t_1), ..., r(t_n)$ de la tasa corta, uno puede, por supuesto, generar valores aproximados de Y (t_i) usando

$$\sum_{j=1}^{i} r(t_{j-1})[t_j - t_{j-1}], t_0 = 0$$

o alguna otra aproximación a la integral de tiempo. Pero en un modelo gaussiano, el par $(r(t), Y(t))$ son conjuntamente gaussianos y a menudo es posible simular caminos del par sin error de discretización. Para llevar a cabo esto simplemente hay que encontrar las medias, las varianzas y la covarianza de los incrementos de $r(t)$ e $Y(t)$.

Se ha determinado (ver 3.7) que, dado $r(t_i)$

$$r(t_{i+1}) \sim N\left(e^{-\alpha(t_{i+1}-t_i)} r(t_i) + \mu(t_i, t_{i+1}), \sigma_r^2(t_i, t_{i+1})\right)$$

A partir de los mismos cálculos usados en 4.5 y 4.8, se tiene que, dado $r(t_i)$ y $Y(t_i)$:

$$Y(t_{i+1}) \sim N\left(Y(t_i) + \mu_Y(t_i, t_{i+1}), \sigma_Y^2(t_i, t_{i+1})\right)$$

con

$$\mu_Y(t_i, t_{i+1}) = \frac{1}{\alpha}\left(1 - e^{-\alpha(t_{i+1}-t_i)}\right) r(t_i) + \alpha \int_{t_i}^{t_{i+1}} \int_{t_i}^{u} e^{-\alpha(u-s)} b(s) ds du$$

y

$$\sigma_Y^2(t_i, t_{i+1}) = \frac{\sigma^2}{\alpha^2}\left((t_{i+1} - t_i) + \frac{1}{2\alpha}\left(1 - e^{-2\alpha(t_{i+1}-t_i)}\right) + \frac{2}{\alpha}\left(e^{-\alpha(t_{i+1}-t_i)} - 1\right)\right)$$

Solo resta determinar la covarianza condicional entre $r(t_{i+1})$ e $Y(t_{i+1})$ dado $(r(t_i), Y(t_i))$. Para ello se procede de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} Cov[r(t), Y(t)] &= \int_0^t Cov[r(t), r(u)] du \\ &= \frac{\sigma^2}{2\alpha} \int_0^t e^{-\alpha(u-t)} - e^{-\alpha(u-t)} du \\ &= \frac{\sigma^2}{2\alpha^2}\left[1 + e^{-2\alpha t} - 2e^{-\alpha t}\right] \end{aligned}$$

La covarianza requerida viene dada por:

$$\sigma_{rY}(t_i, t_{i+1}) = \frac{\sigma^2}{2\alpha}\left[1 + e^{-2\alpha(t_{i+1}-t_i)} - 2e^{-\alpha(t_{i+1}-t_i)}\right]$$

La correlación correspondiente es

$$\rho_{rY}(t_i, t_{i+1}) = \frac{\sigma_{rY}(t_i, t_{i+1})}{\sigma_r(t_i, t_{i+1}) \sigma_Y(t_i, t_{i+1})}$$

Con esta notación, el par (r,Y) se puede simular en los tiempos $t_1,...,t_n$ sin error de discretización utilizando el siguiente algoritmo:

$$\begin{array}{rcl} r\left(t_{i+1}\right) & = & e^{-\alpha\left(t_{i+1}-t_i\right)}r\left(t_i\right)+\mu\left(t_i,t_{i+1}\right)+\sigma_r\left(t_i,t_{i+1}\right)Z_1\left(i+1\right) \\ Y\left(t_{i+1}\right) & = & Y\left(t_i\right)+\mu_Y\left(t_i,t_{i+1}\right)+\sigma_Y\left(t_i,t_{i+1}\right)\left[\rho_{rY}\left(t_i,t_{i+1}\right)Z_1(i+1)\right. \\ & & \left.+\sqrt{1-\rho_{rY}^2\left(t_i,t_{i+1}\right)}Z_2(i+1)\right) \end{array}$$

donde $(Z_1(i),Z_2(i)),i=1,...,n$, son bivariables independientes normales estándar vectores aleatorios.

4.3. Cambio de numerario

Hasta ahora, se ha considerado la dinámica de la tasa corta $r(t)$ solo bajo la medida de neutralidad al riesgo. El activo numerario asociado con el medida neutral al riesgo es $\beta(t)=\exp\int_0^t r(u)du$ y la característica definitoria de este medida de probabilidad es que hace que los precios descontados de los bonos sean $B(t,T)/\beta(t)$ martingalas. De hecho, para la dinámica de los precios de los bonos bajo el régimen gaussiano se consideran modelos de la forma (para T fijo):

$$\frac{dB(t,T)}{B(t,T)}=r(t)dt-A(t,T)\sigma dW(t) \tag{4.10}$$

con $A(t,T)$ determinístico; esto se sigue de 4.9. La solución de esta ecuación es:

$$B(t,T)=B(0,T)\exp\left(\int_0^t\left[r(u)-\frac{1}{2}\sigma^2A^2(u,T)du\right]-\sigma\int_0^tA(u,T)dW(u)\right)$$

de lo cual es evidente que

$$\frac{B(t,T)}{\beta(t)}=B(0,T)\exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2\int_0^tA^2(u,T)du-\sigma\int_0^tA(u,T)dW(u)\right) \tag{4.11}$$

es una martingala exponencial.

La "*forward measure*"para cualquier fecha T_F es la medida asociada con la toma del bono $B(t,T_F)$ (T_F-*vencimiento*) como numerario activo. La característica definitoria de la medida a plazo es que hace que las razones $B(t,T)/B(t,T_F)$ martingalas para $T<T_F$. Está definido por la razón del proceso de verosimilitud:

$$\left(\frac{dP_{T_F}}{dP_\beta}\right)_t=\frac{B\left(t,T_F\right)\beta(0)}{\beta(t)B\left(0,T_F\right)}$$

y esto se da en 4.11 hasta un factor de $1/B(0,T_F)$. Del teorema de Girsanov's, se deduce que el proceso W^{T_F} definido por

$$dW^{T_F}(t)=dW(t)+\sigma A\left(t,T_F\right)dt$$

es un movimiento browniano estándar bajo P_{T_F}. En consecuencia, la dinámica de la Modelo Vasicek se convierte

$$\begin{array}{rcl} dr(t) & = & \alpha\left(b(t)-r(t)\right)dt+\sigma dW(t) \\ & = & \alpha\left(b(t)-r(t)\right)dt+\sigma\left(dW^{T_F}(t)-\sigma A\left(t,T_F\right)dt\right) \\ & = & \alpha\left(b(t)-\sigma^2A\left(t,T_F\right)-r(t)\right)dt+\sigma dW^{T_F}(t) \end{array} \tag{4.12}$$

Por lo tanto, según la medida a plazo, el proceso de tipos cortos sigue siendo un proceso de Vasicek pero el nivel de reversión $b(t)$ se convierte en $b(t) - \alpha^2 A(t, T_F)$.

El proceso en 4.12 se puede simular usando 3.7 con $b(t)$ reemplazado por $b(t) - \alpha^2 A(t, T_F)$. En particular, simulando W^{T_F} de la misma forma que se hace con cualquier otro movimiento browniano estándar. El algoritmo de simulación no “sabe"que está simulando un movimiento browniano bajo la medida de avance en lugar de bajo la medida de neutralidad al riesgo.

Suponiendo que se quiere fijar el precio de un valor derivado obteniendo un pago de $g\left(r\left(T_F\right)\right)$ en el momento T_F. Bajo la medida de neutralidad al riesgo, se fija el precio del valor computando

$$E\left[e^{-\int_0^{T_F} r(u)du} g\left(r\left(T_F\right)\right)\right]$$

De hecho, g podría ser una función de la ruta de $r(t)$ en lugar de solo su terminal valor. Cambiando a la medida de avance, esto se convierte en

$$\begin{aligned} E_{T_F}\left[e^{-\int_0^{T_F} r(u)du} g\left(r\left(T_F\right)\right)\left(\frac{dP_\beta}{dP_{T_F}}\right)_{T_F}\right] &= E_{T_F}\left[e^{-\int_0^{T_F} r(u)du} g\left(r\left(T_F\right)\right)\left(\frac{\beta(T_F)B(0,T_F)}{B(T_F,T_F)\beta(0)}\right)_{T_F}\right] \\ &= B\left(0, T_F\right) E_{T_F}\left[g\left(r\left(T_F\right)\right)\right] \end{aligned}$$

4.4. Ejemplo

Dadas las ecuaciones la ecuación de $B(t,T)$ (ver 4.9), se tiene para $\alpha = 0{,}5, b = 0{,}06, \sigma = 0{,}02, T = 2$ y $r_0 = 0{,}02$:

$$B(t,2) = \exp\left(-A\left(t,2\right) r(t) + C\left(t,2\right)\right)$$

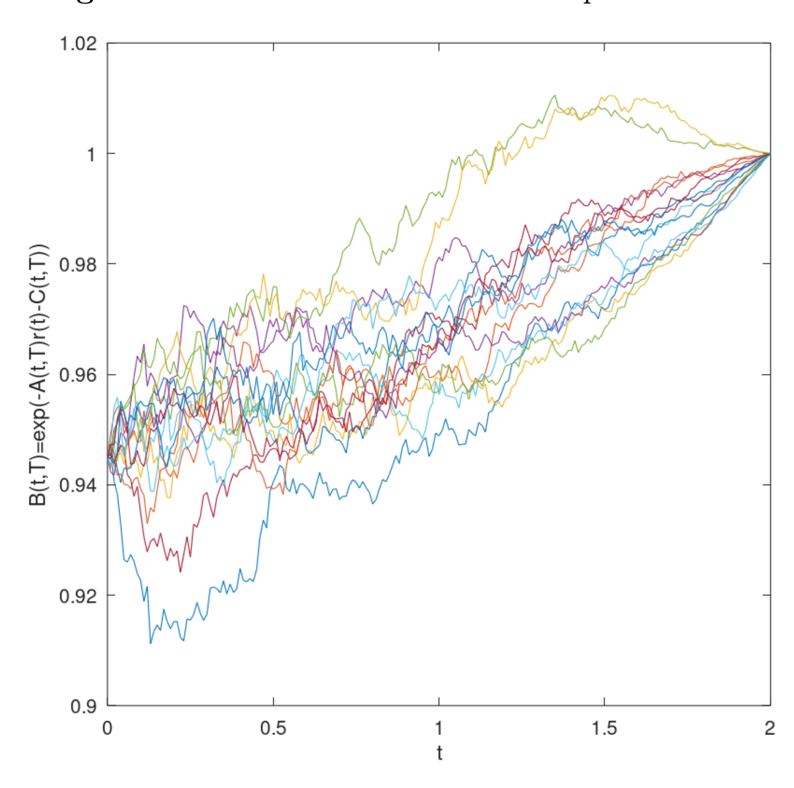
donde:

$$A(t,2) = \frac{1}{0{,}25}\left(1 - e^{-0{,}25(2-t)}\right)$$

$$C(t,2) = \left(A(t,2) - (2-t)\right)\left(0{,}06 - \frac{0{,}02^2}{2(0{,}25)^2}\right) - \frac{0{,}02^2}{4(0{,}25)} A(t,2)^2$$

, a continuación se muestran las gráficas de 15 simulaciones para el precio de los bonos con estos parámetros (*figura 2*), esto por medio del *código 2.*

Figura 2: Simulaciones del modelo de precio de bonos



Código 2: Simulaciones del modelo de precio de bonos

```
clear ; close all; clc
pkg load statistics

delta_tiempo = 0.01;% dt
tiempo_final = 2;
tiempo = 0:delta_tiempo:tiempo_final;

alpha = 0.25; % α
sigma = 0.02; % σ
b = 0.06; % b
X0 = 0.02; % r_0

for k = 1:15
    T(1) = tiempo(1);
    X(1) = X0;
    Z(1) = 0;

    A(1) = (1/alpha)*(1-exp(-alpha*tiempo_final));
    C(1) = (A(1)-tiempo_final)*(b-(sigma^2)/(2*alpha^2))...
        -((sigma^2)/(4*alpha))*A(1)^2;;
    B(1) = exp(-A(1)*X(1)+C(1));

    for i = 2:length(tiempo)
```

```
        T(i) = tiempo(i);
        Z(i) = normrnd(0, 1);
        X(i) = exp(-alpha*(tiempo(i)-tiempo(i-1)))*X(i-1)...
        +b*(1-exp(-alpha*(tiempo(i)-tiempo(i-1))))...
        +sigma*sqrt((1/(2*alpha))*(1-exp(-2*alpha*(tiempo(i)-tiempo(i-1)))))*Z(i);

        A(i) = (1-exp(-alpha*(tiempo_final-tiempo(i))))/alpha;
        C(i) = (A(i)-(tiempo_final-tiempo(i)))*(b-(sigma^2)/(2*alpha^2))...
        -((sigma^2)/(4*alpha))*A(i)^2;

        B(i) = exp(-A(i)*X(i)+C(i));
    end
    plot(T, B);
    hold on;
end
xlabel("t");
ylabel("B(t,T)=exp(-A(t,T)r(t)-C(t,T))");
axis("square");
```

5. Problema de aplicación

5.1. Planteamiento

Se consideran los siguientes 20 valores que corresponden a intereses registrados durante 5 meses por periodos homogéneos de tiempo:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Interés	3	1.2693	1.196	0.9468	0.9532	0.6252	0.8604	1.0984	1.431	1.3019

i	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Interés	1.4005	1.2686	0.7147	0.9237	0.7297	0.7105	0.8683	0.7406	0.7314	7314 0

Se desean generar 50 simulaciones que muestren comportamiento del interés si se suponen las mismas condiciones para los próximos 5 meses por medio del modelo Vasicek

5.2. Solución

Se considera la ecuación 3.9:

$$r\left(t_{i+1}\right)=e^{-\alpha(t_{i+1}-t_i)}r\left(t_i\right)+b\left(1-e^{-\alpha(t_{i+1}-t_i)}\right)+\sigma\sqrt{\frac{1}{2\alpha}\left(1-e^{-2\alpha(t_{i+1}-t_i)}\right)}Z_{i+1}$$

Sean: $\delta t=t_{i+1}-t_i$, $r_{t+1}=r(t_i+1)$, $r_t=r(t_i)$ y $Z=Z_{i+1}$, luego la ecuación se cambia a la forma:

$$r_{t+1}=e^{-\alpha\delta t}r_t+b\left(1-e^{-\alpha\delta t}\right)+\sigma\sqrt{\frac{1}{2\alpha}\left(1-e^{-2\alpha\delta t}\right)}Z$$

La relación entre los r_{t+1} y r_t es lineal con una variable aleatoria normal añadida, es decir:

$$r_{t+1}=Ar_t+B+\varepsilon$$

, donde

$$A=e^{-\alpha\delta t}\quad,\quad B=b\left(1-e^{-\alpha\delta t}\right)\quad,\quad \varepsilon=\sigma\sqrt{\tfrac{1-e^{-2\alpha\delta t}}{2\alpha}}$$

, por lo cual:

$$\alpha=-\tfrac{\ln A}{\delta t}\quad,\quad b=\tfrac{B}{1-\alpha}\quad,\quad \sigma=\varepsilon\sqrt{\tfrac{-2\ln A}{\delta t(1-A^2)}}$$

Luego usando el *ajuste de mínimos cuadrados*, se tiene que:

$$\widehat{A}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(r_{i+1}r_i\right)-\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}r_i\sum_{i=1}^{n}r_{i+1}\right)}{\sum_{i=1}^{n}r_i^2-\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}r_i\sum_{i=1}^{n}r_i\right)}$$

$$\widehat{B}=\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}r_{i+1}-\sum_{i=1}^{n}\widehat{A}r_i\right)$$

Se realizan los cálculos y las simulaciones con el *código 3*:

Código 3: Estimación de parámetros para el modelo Vasicek dada una muestra

```
clear ; close all; clc
pkg load statistics

r = [3 1.2693 1.196 0.9468 0.9532 0.6252 0.8604 1.0984 1.431];
r = [r 1.3019 1.4005 1.2686 0.7147 0.9237 0.7297 0.7105 0.8683 0.7406 0.7314 0.6232];

n = length(r)-1;
delta_tiempo=0.25;

X=r(1:n);
Y=r(2:end);

rx = sum(X);
ry = sum(Y);
rxx = sum(X.*X);
rxy = sum(X.*Y);
ryy = sum(Y.*Y);

A = (n*rxy-rx*ry)/(n*rxx-rx^2);
B = (ry-A*rx)/n;
e = sqrt((n*ryy-ry^2-(A*rxy-rx*ry))/(n*(n-2)));

alpha = -log(A)/delta_tiempo;
b = B/(1-A);
sigma = e*sqrt(-2*log(A)/(delta_tiempo*(1-A^2)));

tiempo_final = n*delta_tiempo;
tiempo = 0:delta_tiempo:tiempo_final;

subplot(1,2,1)
plot(tiempo,r);
hold on;
legend("muestra");


G = [1, 50];
for l = 1:length(G)
  for k = 1:G(l)
      T(1) = tiempo(1);
      X(1) = r(1);
      Z(1) = 0;

      for i = 2:length(tiempo)
          T(i) = tiempo(i);
          Z(i) = normrnd(0, 1);
          X(i) = exp(-alpha*(tiempo(i)-tiempo(i-1)))*X(i-1)...
```

```
            +b*(1-exp(-alpha*(tiempo(i)-tiempo(i-1))))...
            +sigma*sqrt((1/(2*alpha))*(1-exp(-2*alpha*(tiempo(i)-tiempo(i-1)))))*Z(i);
        end
        subplot(1,2,1)
        plot(T, X);
        hold on;
        xlabel("t");
        ylabel("r(t)");
        axis("square");
    end
    subplot(1,2,1);
end

%parámetros
alpha
b
sigma

%esperanza teórica
EE = ((r(1)-b).*exp((-alpha).*tiempo)).+b;

%varianza teórica
pvar = (sigma^2)/(2*alpha);
var = (-pvar).*exp((-2*alpha).*tiempo).+pvar;
plot(tiempo, EE,"-k" ,'LineWidth',2);
plot(tiempo, EE.+(2.*sqrt(var)), "--k" ,'LineWidth',2);
plot(tiempo, EE.-(2.*sqrt(var)), "--k" ,'LineWidth',2);
```

El *código 3* dejó los siguientes resultados:

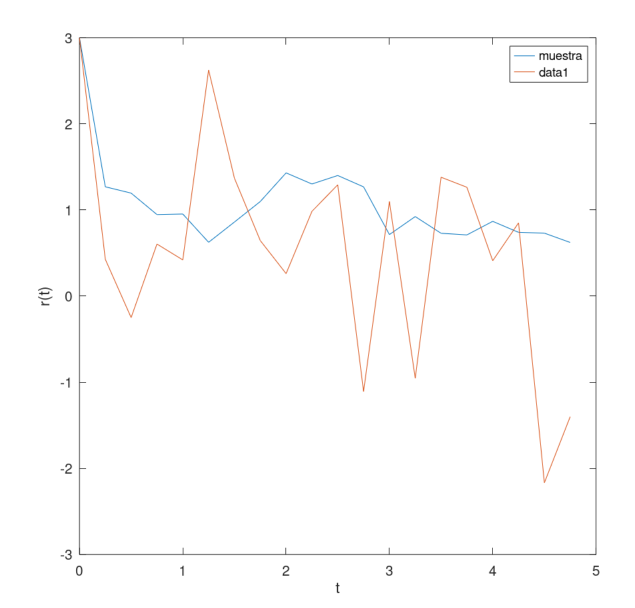
$$\alpha = 5{,}1617 \qquad b = 0{,}9206 \qquad \sigma = 3{,}7245$$

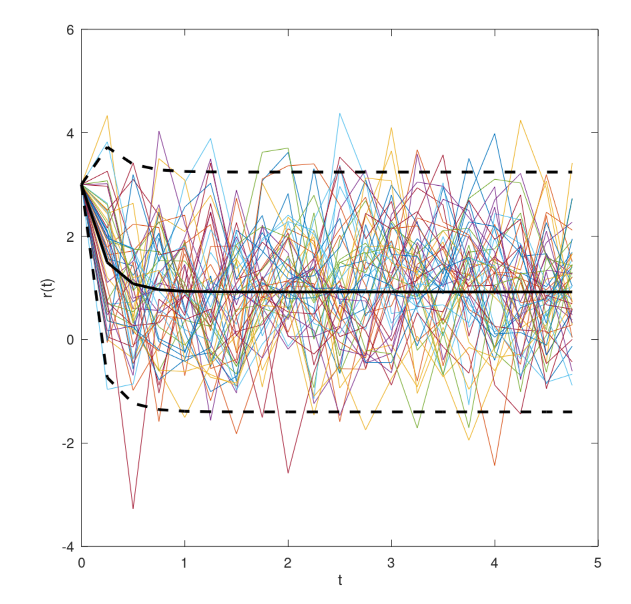
con lo cual la ecuación del modelo Vasicek teórico para $r(t)$ queda así:

$$r_{t+1} = e^{-(5{,}1617)(0{,}25)} r_t + 0{,}9206 \left(1 - e^{-(5{,}1617)(0{,}25)}\right) + 3{,}7245 \sqrt{\frac{1}{2(5{,}1617)} \left(1 - e^{-2(5{,}1617)(0{,}25)}\right)} Z$$

, además el *código 3* también muestra dos imágenes (ver *figura 3*), en la izquierda están las gráficas de la muestra real y la gráfica de una simulación del modelo teórico, en la izquierda aparecen las gráficas de 50 simulaciones del modelo y la gráfica de la esperanza $E(r(t))$ junto con las gráficas $E(r(t)) \pm 2\sqrt{Var(r(t))}$

Figura 3: Estimación de parámetros del modelo de Vasicek dada una muestra





5.3. Análisis de resultados

- Se nota en las 50 simulaciones que los cambios en el valor del interés varía bastante de forma repentina
- Teóricamente se espera que el valor del interés se acerque a la curva de esperanza, esto se logrará en un periodo más largo de tiempo
- Se nota que las curvas de esperanza y esperanza mas y menos varianza son representativas del comportamiento del interés en este corto periodo de tiempo

6. Conclusiones

- En el modelo de Vasicek se observó el fenómeno de reversión a la media, que ayuda a predecir los movimientos futuros de las tasas de interés
- Cuando el factor drift ($\alpha(b - r(t))$) es menor que 0, es probable que la tasa de interés disminuya, por el contrario si el factor drift es mayor que 0, es probable que la tasa de interés aumente
- Para que el modelo de Vasicek funcione de manera estable, el parámetro α (es decir, la velocidad de reversión media) siempre debe ser positivo.
- La volatilidad del mercado (o riesgo de mercado) es el único factor que afecta los cambios en las tasas de interés en el modelo de Vasicek (utiliza parámetros fijos). Sin embargo, múltiples factores pueden afectar la tasa de interés en el mundo real, lo que hace que el modelo sea menos práctico
- Para el desarrollo del modelo Vasicek y sus derivados ha sido esencial el denominado Cálculo de Itô, y en particular, de su integral estocástica en términos de la cual se expresa la solución del modelo de Vasicek.
- El modelamiento para el precio de bonos supone poder generar también una curva de rendimiento de bonos conocida como *yield curve*

7. Bibliografía

7.1. Libros

- Paul Glasserman, Monte Carlo Methods in Financial Engineering, 2003. Springer

7.2. Tesis

- “Modelo de ajuste de tasas de interés forward instantáneas con tendencias variables y que sigue una relación de sustitución entre mercados adyacentes", Jesús Bravo Pliego, Institulo tecnológico y de estudios superiores de Monterrey, enero 2008.

7.3. Enlaces

- Introducción:
  - http://mat.izt.uam.mx/mat/images/finanzas/CarlosIbarra.pdf
- Modelos básicos y simulaciones
  - https://www.researchgate.net/publication/275823417_Monte_Carlo_Simulation_for_Vasicek_Interest_Rate_Model_Parameters
  - https://sites.google.com/uniupo.it/stochasticcalculus/important-sdes/mean-reverting-models/vasicek-model/simulating-the-vasicek-model
- Precio de bonos
  - https://www.scielo.br/j/rcf/a/fqdG7MkrsW9npHcChDhs6Km/?lang=en
- Problema de aplicación:
  - http://www.iam.fmph.uniba.sk/institute/stehlikova/fd14en/ex/ex04.html
  - https://sarit-maitra.medium.com/pca-monte-carlo-simulation-for-vasicek-interest
  - https://www.researchgate.net/publication/275823417_Monte_Carlo_Simulation_for_Vasicek_Interest_Rate_Model_Parameters